Dynamics of States with Non-Zero Moment in Own Field

A. S. Chikhachev

ABSTRACT

The paper studies a nonstationary self-consistent quantum system that intensively interacts with its own field. At a non-zero moment, the psi function cannot be independent of the angles of the spherical coordinate system. In this paper, a superposition of angular distributions is found, leading to a spherically symmetric charge distribution for the whole value of the moment (l=1).

The paper defines the conditions under which in the case of half-integer values of the moment $l=\frac{1}{2}$ the charge density distribution turns out to be spherically symmetric. In this case, a self-consistent system can be described by a system of ordinary differential equations.

In the final section, a classical collisionless one-component system of charged particles characterized by a nonzero moment is considered.

Keywords: schrodinger equation, orbital moment, nonstationary coordinates, kinetic equation.

Classification: LCC: QC174.17.P75

Language: English

Great Britain Journals Press

LJP Copyright ID: 925682
Print ISSN: 2631-8490
Online ISSN: 2631-8504

London Journal of Research in Science: Natural and Formal

Volume 23 | Issue 17 | Compilation 1.0

Dynamics of States with Non-Zero Moment in Own Field

ДИНАМИКА СОСТОЯНИЙ С НЕНУЛЕВЫМ МОМЕНТОМ В СОБСТВЕННОМ ПОЛЕ

A. S. Chikhachev

ABSTRACT

The paper studies a nonstationary self-consistent quantum system that intensively interacts with its own field. At a non-zero moment, the psi function cannot be independent of the angles of the spherical coordinate system. In this paper, a superposition of angular distributions is found, leading to a spherically symmetric charge distribution for the whole value of the moment (l=1).

The paper defines the conditions under which in the case of half-integer values of the moment $l=\frac{1}{2}$ *the charge density distribution turns out to be spherically symmetric. In this case, a self-consistent system can be described by a system of ordinary differential equations.*

In the final section, a classical collisionless one-component system of charged particles characterized by a nonzero moment is considered.

Keywords: schrodinger equation, orbital moment, nonstationary coordinates, kinetic equation.

Аннотация

В работе изучается нестационарная самосогласованная квантовая система, интенсивно взаимодействующая с собственным полем. При ненулевом моменте пси-функция не может быть независящей от углов сферической системы координат. В работе найдена суперпозиция угловых распределений, приводящая к сферически симметричному распределению заряда при целом значении момента ($l=1$ *).*

В работе определены условия, при которых в случае полуцелых значениях момента $l=\pm\frac{1}{2}$ *распределение плотности заряда оказывается сферически симметричным. В этом случае самосогласованная система может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

В заключительном разделе рассмотрена классическая бесстолкновительная однокомпонентная система заряженных частиц, характеризуемая ненулевым моментом.

Ключевыеслова: уравнение Шредингера, орбитальный момент, нестационарные координаты.

I. Введение

Изучение нестационарных систем, интенсивно взаимодействующих с собственным полем представляет большой интерес как с экспериментальной, так и с теоретической точек

London Journal of Research in Science: Natural and Formal

зрения. Особый интерес представляет квантовомеханическая система, использующая нестационарный гамильтониан. В настоящей работе будет использован нестационарный гамильтониан, следующий из работ Мещерского [1]. Этот гамильтониан использован в работе [2] для решения квантовомеханической задачи. В работах [3,4] решались задачи в одномерной конфигурации и сферически симметричная проблема при нулевом орбитальном моменте l=0.

В настоящей работе приведено решение уравнения Шредингера в сферических координатах при ненулевом орбитальном моменте, причем рассмотрены задачи с целым (l=1) и полуцелым орбитальным моментом. Так же, как и в работах [3,4] точное решение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка.

Заметим здесь, что используемый нестационарный гамильтониан может быть использован как для квантовых, так идля классических систем. Кинетическое уравнение с использованием модельного нестационарного гамильтониана, впервые, по-видимому, сформулировано в работе [5]. В дальнейшем динамика нестационарных самосогласованных систем в плоской исферической геометрии изучались в работах [6],[7],[8].

Состояния с моментом l=1

Состояние квантовой системы с ненулевым моментом в центральном поле описывается уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{\hat{L}}{r^2}\Psi\Big)+U(r,t)\Psi(r,t), \qquad 1.1$$

здесь

$$\hat{L}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Положим

$$\Psi\left(\vec{r},t\right)=\psi(r,t)Y(\varphi,\theta)$$

При этом

$$\hat{L}Y=-LY\ ,$$

где $L=l\left(l+1\right)$ -квадрат полного момента. При $L\neq 0$ в уравнении присутствуют производные по угловым переменным, что означает отсутствие сферической симметрии изучаемого состояния, что является существенным обстоятельством для систем с собственным полем.

Рассмотрим, далее, случай, когда $L=l\left(l+1\right)$ и введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r,t)=\psi_1(r,t)r^l$, причем будем изучать нестационарную систему, описываемую

потенциалом вида: $\dfrac{1}{\xi(t)^2}U\Big(\dfrac{r}{\xi(t)}\Big)$,
получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}+\frac{2(l+1)}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\Big)+\frac{1}{\xi(t)^2}U\Big(\frac{r}{\xi(t)}\Big)\psi_1(r,t), \qquad 1.2$$

Здесь $\xi(t)$ функция, удовлетворяющая уравнению: $\ddot{\xi}=\frac{\lambda}{\xi^3}$,

U/ξ^2 -потенциал собственного поля, r,φ,θ - координаты сферической системы.

Введем новые переменные: $\tau=\int\frac{dt'}{\xi(t')^2}, \rho=\frac{r}{\xi}$.

Тогда (1.2) приводится к виду:

$$i\hbar\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}-\rho\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\Big)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2}+\frac{2(l+1)}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\Big)+U(\rho)\psi_1(\rho,\tau). \qquad 1.3$$

Произведем следующее преобразование, положим $\psi_1=\Lambda\psi_2$, где $\Lambda=\exp\Big(\frac{im}{2\hbar}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\rho^2\Big)$. Для ψ_2 следует уравнение:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\rho^2}+\frac{2(l+1)}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\Big)+U(\rho)\psi_2(\rho,\tau)-\frac{\lambda m\rho^2}{2}\psi_2-\frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\Big(l+\frac{3}{2}\Big)\psi_2. \quad 1.4 \qquad 1.4$$

При решении самосогласованной задачи с $l=1$ удобно ввести функцию

$\psi_3:\psi_2=\psi_3/\xi^3$. Получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial\rho^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial\psi_3}{\partial\rho}\Big)+U\ \rho\ \psi_3\ \rho\ \tau\ -\frac{\lambda m\rho^2}{2}\psi_3+\frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\psi_3 \qquad 1.5$$

В (1.5) положим

$$\psi_3=\exp\Big(-\frac{iE\tau}{\hbar}\Big)\psi(\rho),\ \frac{\xi}{\xi}\equiv const=\frac{1}{2\tau_0},\ \lambda=-\frac{1}{4\tau_0^2}.$$

Тогда

$$E\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\Big)+U(\rho)\psi(\rho)-\frac{\lambda m\rho^2}{2}\psi+\frac{i\hbar}{4\tau_0}\psi(\rho). \qquad 1.6$$

При этом плотность заряда определяется выражением $|\Psi|^2=\rho^2|\psi|^2|Y|^2/\xi^4$.

В случае $l=1$ угловую часть пси-функции можно рассматривать как состояние со спином единица, описываемое столбцом $:Y=\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix}$, соответственно Y^+ -это строка $\left(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*\right)$.
Положим

$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(i\phi), Y_2=\cos\theta, Y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(-i\phi).$ При таком выборе представления

$$\overline{M_z}=Y^+M_zY=0, \overline{M_x}=Y^+M_xY=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta\cos\phi, \overline{M_y}=Y^+M_yY=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta\sin\phi,$$

а плотность заряда, определяемая произведением Y^+Y, не зависит от углов: $Y^+Y=1$.
В этом случае уравнение для потенциала можно записать в виде:

$$\frac{1}{\xi^4}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho}=-\kappa_*\rho^2|\psi|^2\frac{1}{\xi^4}. \qquad 1.7$$

Здесь κ_* -константа связи. Положим, далее, $\psi=R(\rho)\exp(i\theta(\rho))$. Получим систему уравнений:

$$ER=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R''-R\theta'^2+\frac{4}{\rho}R'\right)+R\left(U-\frac{m\rho^2}{8\tau_0}\right), \qquad 1.8$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\ R'\theta'+R\theta''+\frac{4}{\rho}R\theta'\right)+\frac{\hbar}{4\tau_0}= \qquad 1.9$$

Вместо ρ введем переменную s: $\rho=l_0s, l_0^2=\hbar\tau_0/m$. Обозначим

$y=\theta'l_0, V(s)=\frac{4\tau_0}{\hbar}(U-E).$ Тогда система принимает вид:

$$R''-Ry^2+\frac{4R'}{s}=V(s)R-s^2R, \qquad 1.10$$

$$2R'y+Ry'+\frac{4}{s}Ry=R \qquad 1.11$$

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{2}{s}\frac{dV}{ds}=-\kappa_0s^2R^2. \qquad 1.12$$

Можно переписать (1.11) в виде: $(R^2ys^4)'=R^2s^4$, а (1.12)-в виде
$\frac{d}{ds}s^2\frac{d}{ds}V(s)=\kappa_0R^2s^4=-\kappa_0(R^2s^4y)'$. Тогда $s^2\frac{dV}{ds}=-\kappa_0R^2ys^4+C_*$. Полагая $C_*=0$
получим уравнение:

$$\frac{dV}{ds} = -\kappa_0 R^2 y s^2. \qquad 1.13$$

Уравнение(1.10) удобно переписать в виде:

$$\frac{R''}{R} + \frac{4R'}{sR} = V + y^2 - s^2, \qquad 1.14$$

а (1.11)-

$$y' = -2y\frac{R'}{R} - \frac{4}{s}Ry + R. \qquad 1.15$$

Т.е. имеем систему (1.13)-(1.15).

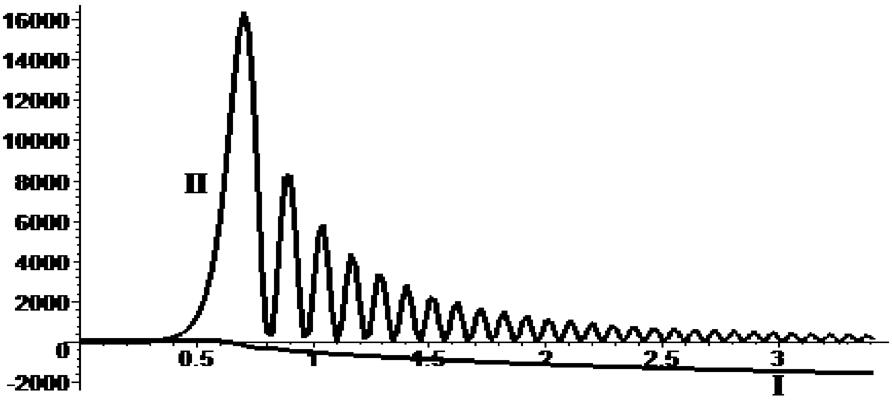

Рис. 1: З ависимость потенциала (I) и плотности заряда (II) от автомодельной переменной s.

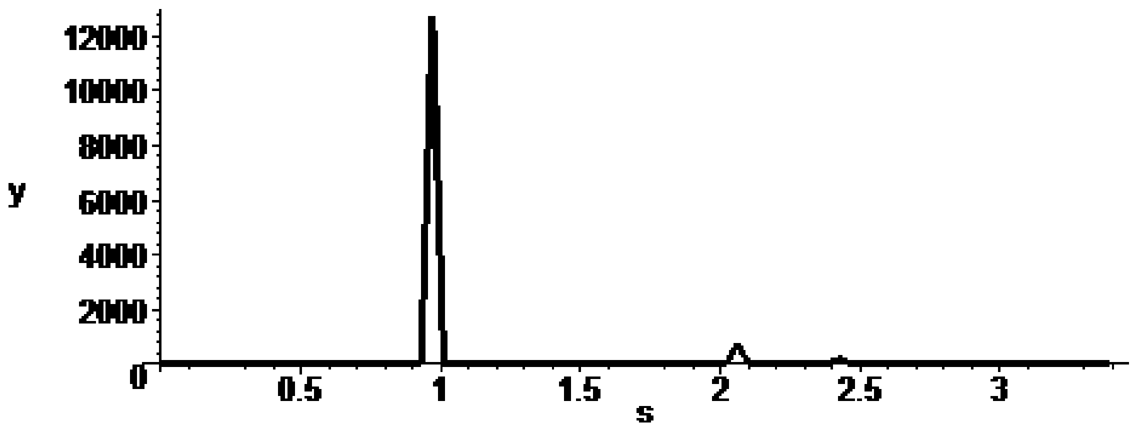

Рис. 2: Зависимость y (s).

На рисунках 1 и 2 изображены результаты решения системы (1.13), (1.14) и (1.15). В качестве начальных условий использовались соотношения: R(0)=10,R'(0)=0,V(0)=100,y(0)=0. Полагалось $\kappa_0 = 1$ Зависимость y(s) характеризуется наличием резких и узких максимумов, плотность заряда быстро осциллирует и стремится к нулю, а потенциал убывает монотонно.

Состояния с моментом $l = 1/2$

В отличие от прелылущего раздела рассмотрим, далее, случай, когда $L = 3/4$ (l=1/2). Как и в предыдущем случае положим $\Psi(\vec{r},t) = \psi(r,t)Y(\theta,\varphi)$.

Введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r,t) = \psi_1(r,t)\sqrt{r}$, Представим также и потенциал в виде произведения функции от углов на функцию от радиуса: $U(\vec{r},t) = \Delta(\theta,\varphi)U(r,t)$. В дальнейшем будут определены условия, при которых $\Delta(\theta,\varphi) \equiv const$.

Получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\Big) + \frac{\Delta}{\xi(t)^2}U\Big(\frac{r}{\xi(t)}\Big)\psi_1(r,t), \qquad 2.1$$

Введем новые переменные: $\tau = \int\frac{dt'}{\xi(t')^2}, \rho = \frac{r}{\xi}$,

тогда (2.1) приводится к виду:

$$i\hbar\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \quad \rho\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\Big) \qquad \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2} \quad \frac{3}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\Big) \quad U \;\rho\; \psi_1 \;\rho\; \tau \qquad 2.2$$

Введем, длее, ψ_2, положив $\psi_1 = \psi_2\Lambda/\xi^{5/2}$, где $\Lambda = \exp\Big(\frac{im}{2\hbar}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\rho^2\Big)$.

Получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\Big) + U \;\rho\; \psi_2 \;\rho\; \tau\; \Delta - \frac{m\rho^2}{8\tau_0^2}\psi_2 + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\psi_2 \qquad 2.3$$

Плотность заряда имеет вид: $Q = |\Psi|^2 = |\psi_2|^2 \;\rho\; |Y|^2/\xi^4$,

где Y удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad 2.4$$

Вместо переменной θ введем $\eta = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. тогда уравнение принимает вид:

$$ch^2\eta\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\Big) = -\frac{3}{4}Y. \qquad 2.5$$

Далее будем учитывать спинорный характер Ψ -функции и представлять Y в виде столбца $: Y=\sqrt{\Omega(\eta)/2}\begin{pmatrix}\exp(i\varphi/2)\\ \exp(-i\varphi/2)\end{pmatrix}$,

соответственно Y^{+} -это строка $Y^{+}=\sqrt{\Omega(\eta)/2}\,\big(\exp(-i\varphi/2),\exp(i\varphi/2)\big)$. Проекции момента на оси координат имеют вид:

$$M_x=Y^{+}\sigma_x Y=\Omega\cos\varphi, M_y=Y^{+}\sigma_y Y=-\Omega\sin\varphi, M_z=Y^{+}\sigma_z Y=0.$$

Зависимость плотности от углов определяется произведением $Y^{+}Y$ и при выбранном представлении не зависит от угла φ: $Y^{+}Y=\Omega(\eta)$.

Представим потенциал в виде произведения функции от радиуса на функцию от угловых переменных, а поскольку плотность заряда не зависит от φ, потенциал также не зависит от $\varphi: V=\Delta(\eta)U(\rho)$. Используя переменную η вместо θ получим:

$$\Delta(\eta)\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU(\rho)}{d\rho}+\frac{U(\rho)}{\rho^2}\mathrm{ch}^2(\eta)\left(\frac{d^2\Delta}{d\eta^2}\right)=Q. \qquad 2{,}6$$

Здесь Q -плотность заряда. В случае взаимодействия с собственным полем $Q=-\mu|\Psi|^2,\mu$ - константа связи.

Полное отделение функции радиуса от функции угла может быть достигнуто, если выполнены условия: $\mathrm{ch}^2(\eta)\frac{d^2\Delta}{d\eta^2})=\nu\Delta$ (ν – -константа) и $\Omega\equiv\Delta$. Из (2.5) можно получить:

$$\mathrm{ch}^2(\eta)\big(2\Omega''\Omega-\Omega'^2-\Omega^2\big)=-3\Omega^2. \qquad 2.7$$

Исключая из этих соотношений $ch^2(\eta)$ получим уравнение:

$$\Omega''\Omega(2\nu+3)=\nu(\Omega'^2+\Omega^2).$$

Это уравнение имеет интеграл:

$$C_1=\Omega^{-\frac{2\nu}{2\nu+3}}\Big(\Omega'^2-\frac{\nu}{\nu+3}\Omega^2\Big) \qquad (2.8)$$

Введем функцию $S(\eta)=\Omega^{\frac{\nu+3}{2\nu+3}}$. Тогда выражение для интеграла принимает вид:

$$C_1=\Big(\frac{2\nu+3}{\nu+3}S'\Big)^2-\frac{\nu}{\nu+3}S^2.$$

Из этого соотношения следует, что при $\nu = -\frac{3}{2}$ $S \equiv const$. В то же время при $\nu = -3/2$ $\Omega \equiv 1$. Из (2.6) следует уравнение:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho} - \frac{3}{2}\frac{U}{\rho^2} = -\kappa_0 |\psi_2|^2 \rho. \quad 2.9$$

В уравнении (2.3) сделаем замену:

$$\psi_2 = \exp\Big(-\frac{iE\tau}{\hbar}\Big)R(\rho)\exp(i\theta(\rho)), \quad 2.10$$

где E - действительная величина, $R(\rho),\theta(\rho)$, -действительные функции. Положив $\frac{\dot{\xi}}{\xi} \equiv const = \frac{1}{2\tau_0}$, получим:

$$ER = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(R'' - R\theta'^2 + \frac{3}{\rho}R'\Big) + R\Big(U + \frac{\lambda m\rho^2}{2}\Big), \quad 2.11$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(2R'\theta' + R\theta'' + \frac{3}{\rho}R\theta'\Big) + \frac{\hbar}{4\tau}R = 0. \quad 2.12$$

Уравнение (2.9) (с заменой $|\psi_2|^2$ на R^2 и (2.11) и (2.12) образуют замкнутую систему, описывающую нестационарную динамику. Вместо ρ введем безразмерную переменную $s : \rho = l_0 s, l_0^2 = \frac{2\hbar\tau_0}{m}$. Обозначим

$$y = l_0\theta', V = \frac{4\tau_0(U-E)}{\hbar}, \kappa_1 = \kappa_0 = \frac{4\tau_0}{\hbar}\Big(\frac{2\hbar\tau_0}{m}\Big)^2.$$

Тогда система принимает вид:

$$R'' - Ry^2 + \frac{3R'}{s} = (V(s) - s^2)R, \quad 2.13$$

$$2R'y + Ry' + \frac{3}{s}Ry = R, \quad 2.14$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dV}{ds} - \frac{3}{2}\frac{V(s)}{s^2} = -\kappa_1 sR^2. \quad 2.15.$$

Удобно, далее, ввести функцию $W(s) = \frac{dV}{ds.}$. Уравнение (2.14) можно представить в виде: $(R^2 s^3 y)' = R^2 s^3$. Тогда (2.15) приводится к виду:

$$s^2\frac{dV}{ds}-\frac{3}{2}W(s)=-\kappa_1 R^2 s^3 y(s)+C_*. \qquad 2.16$$

По-видимому, система (2.13), (2.14), (2.16) не имеет решения, регулярного в нуле. На Рис.3. приведены решения, использующие краевые условия при $s=1$. Полагалось $C_*=0, W(1)=-100, W'(1)=0, R'(0)=0, y(1)=0, R(1)=10, \kappa_1=1$. Решение характеризуется колебательным поведением функции y(s) и монотонным убыванием потенциала и ростом полного заряда внутри сферы радиуса s. Начальная точка счета полагалась $s_0=0.9$. При $s<0.002$ решение не определено.

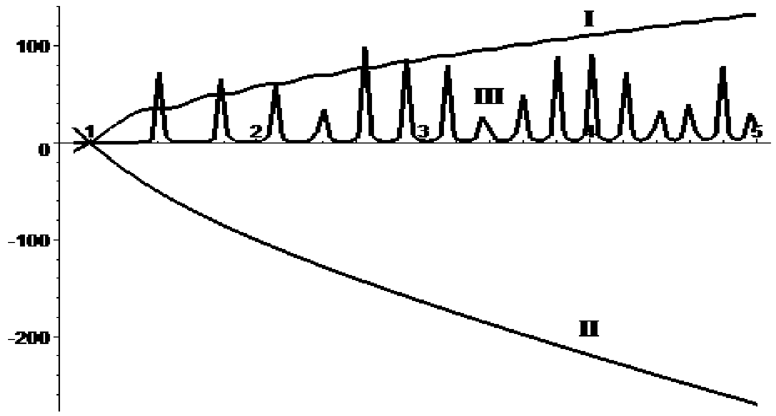

Рис.3: Кривая I-зависимость полного заряда внутри сферы радиуса s от s, кривая II-потенциал, кривая III-зависимость y(s).

Состояния с моментом $l=-\frac{1}{2}$

В отличие от предыдущего раздела рассмотрим, далее, случай, когда $L=-\frac{1}{4} \quad (l=-\frac{1}{2})$.

Как и в предыдущем случае положим $\Psi(\vec{r},t)=\psi(r,t)Y(\theta,\varphi)$. Введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r,t)=\psi_1(r,t)/\sqrt{r}$, причем потенциал также представим в виде произведения функции от углов на функцию от r,t: $\Delta(\theta,\varphi)U\left(\frac{r}{\xi}\right)\frac{1}{\xi^2}$.
Получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)+\frac{\Delta}{\xi(t)^2}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right)\psi_1(r,t), \qquad 3.1$$

Введем новые переменные: $\tau=\int\frac{dt'}{\xi(t')^2}, \rho=\frac{r}{\xi}$.

Тогда (3.1) приводится к виду:

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}-\rho\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right)+U(\rho)\psi_1(\rho,\tau)\Delta. \qquad 3.2$$

Введем, длее, ψ_2, , положив $\psi_1 = \psi_2 \Lambda / \xi^{3/2}$. Получим:
\begin{equation}

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}\right) + U(\rho)\psi_2(\rho,\tau)\Delta - \frac{m\rho^2}{8\tau_0^2}\psi_2 + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\psi_2. \quad 3.3$$

Плотность заряда имеет вид: $Q = |\Psi|^2 = \frac{|\psi_2|^2 |Y|^2}{\rho \xi^4}$, где Y удовлетворяет уравнению: \

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} - \frac{1}{4}Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0. \quad 3.4$$

Вместо переменной θ введем $\eta = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, тогда уравнение принимает вид:\

$$\mathrm{ch}^2\eta\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) = \frac{1}{4}Y. \quad 3.5$$

Далее будем учитывать спинорный характер $\Psi -$ функции и представлять Y в виде столбца: $Y = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\begin{pmatrix}\exp(i\varphi/2)\\ \exp(-i\varphi/2)\end{pmatrix}$,

соответственно Y^+ это строка $Y^+ = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\,(\exp(-i\varphi/2), \exp(i\varphi/2))$. Зависимость плотности от углов определяется произведением Y^+Y и при выбранном представлении не зависит от угла φ: $Y^+Y = \Omega(\eta)$. Представим потенциал в виде произведения функции от радиуса на функцию от угловых переменных, а поскольку плотность заряда не зависит от φ, потенциал также не зависит от $\varphi : V = \Delta(\eta)U(\rho)$. Используя переменную η вместо θ получим:

$$\Delta(\eta)\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU(\rho)}{d\rho} + \frac{U(\rho)}{\rho^2}\mathrm{ch}^2(\eta)\left(\frac{d^2\Delta}{d\eta^2}\right) = Q. \quad 3{,}6$$

Здесь Q -плотность заряда. В случае взаимодействия с собственным полем $Q = -\mu|\Psi|^2, \mu$ - константа связи. Полное отделение функции радиуса от функции угла может быть

достигнуто, если выполнены условия: $\mathrm{ch}^2(\eta)\frac{d^2\Delta}{d\eta^2}) = \nu\Delta$ ($\nu\$ -$ константа) и $\Omega \equiv \Delta$. Из (3.5) можно получить:

$$\mathrm{ch}^2(\eta)\left(2\Omega''\Omega - \Omega'^2 - \Omega^2\right) = \Omega^2. \quad 3.7$$

Исключая из этих соотношений $\mathrm{ch}^2(\eta)$ получим уравнение:

$$\Omega''\Omega(2\nu-1)=\nu(\Omega'^2+\Omega^2). \qquad 3.8$$

Это уравнение имеет интеграл: $C_1=\Omega^{-\frac{2\nu}{2\nu-1}}\left(\Omega'^2-\frac{\nu}{\nu-1}\Omega^2\right)$. Введем определение $S=\Omega^{\frac{\nu+1}{2\nu-1}}$.

Тогда $C_1=S'^2\left(\frac{-2\nu+1}{\nu-1}\right)-\frac{\nu}{\nu-1}S^2$. Из этого соотношения при $\nu=1/2$ следует,что

$S=const$, а $\Omega=S^0\equiv 1$, также отсюда следует $\Delta\equiv 1$ и что распределение плотности заряда является сферически симметричным.

Из (3.6) следует уравнение:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho}+\frac{1}{2}\frac{U}{\rho^2}=-\kappa_0\frac{|\psi_2|^2}{\rho}. \qquad 3.9$$

В уравнении (3.3) сделаем замену:

$$\psi_2= \quad (-\frac{iE\tau}{\hbar})R \ \rho \qquad i\theta \ \rho \qquad 3.10$$

Где E - действительная величина, $R(\rho),\theta(\rho)$ -действительные функции. Положив $\frac{\dot{\xi}}{\xi}\equiv const=\frac{1}{2\tau_0}$, получим систему:

$$ER=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R''-R\theta'^2+\frac{1}{\rho}R'\right)+R\left(U+\frac{\lambda m\rho^2}{2}\right) \qquad 3.11$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'\theta'+R\theta''+\frac{1}{\rho}R\theta'\right)+\frac{\hbar}{4\tau_0}R= \qquad 3.12$$

Уравнеие (3.9) (с заменой $|\psi_2|^2$ на R^2 и (3.11) и (3.12) образуют замкнутую систему, описывающую нестационарную динамику. Вместо ρ ведем безразмерную переменную $s:\rho=l_0 s, l_0^2=\frac{2\hbar\tau_0}{m}$. Обозначим

$$y=l_0\theta', V=\frac{4\tau_0(U-E)}{\hbar}, \kappa_1=\kappa_0=\frac{4\tau_0}{\hbar}\left(\frac{2\hbar\tau_0}{m}\right)^2.$$

Тогда система принимает вид:

$$R''-Ry^2+\frac{R'}{s}=(V(s)-s^2)R, \qquad 3.13$$

$$2R'y+Ry'+\frac{1}{s}Ry=R, \qquad 3.14$$

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{2}{s}\frac{dV}{ds}+\frac{1}{2}\frac{V(s)}{s^2}=-\kappa_1\frac{R^2}{s}. \qquad 3.15$$

При решении этой системы полагалось $V(s)=sV_1(s)$ и использованы граничные условия: $R(0)=1, R'(0)=0, y(0)=0, V_{1'}(0)=0, V_1(0)=-2/5.$ Для получения регулярного в нуле решения необходимо использовать равенство $5/2V_1(0)=-\kappa_1 R^2(0)$ Отметим, что на рис.4 можно видеть, что потенциал (кривая I) и полный заряд (кривая II) медленно изменяются, тогда как y(s) (кривая III) колеблется относительно линейно растущей функции.

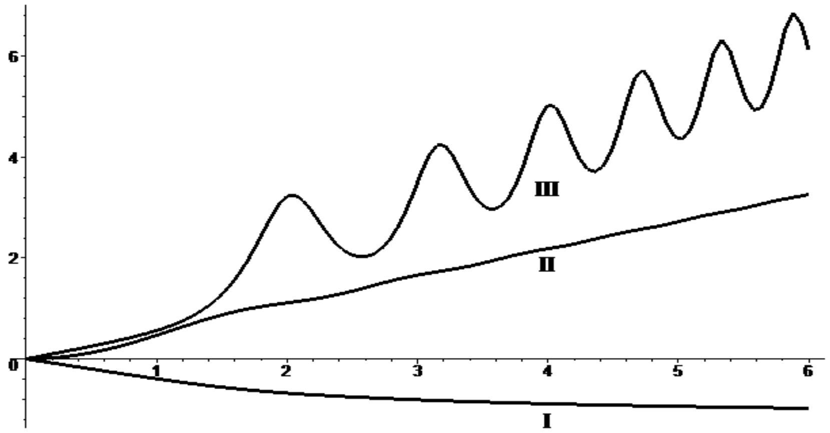

Рис.4: Зависимости потенциала (I), полного заряда (II) и функции y от s

Кинетическая модель сферически симметричной системы зарядов

Нестационарный гамильтониан сферически симметричной системы точечных зарядов имеет вид:

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{L}{2mr^2}+\frac{1}{\xi^2(t)}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right) \qquad 4.1$$

Здесь $p_r=m\dot{r}, L-$ квадрат полного момента количества движения, в классической задаче $L>0,\ \xi(t)$ - вспомогательная функция, удовлетворяющая уравнению $\ddot{\xi}=\frac{\lambda}{\xi^3}, \lambda-$ -константа. Используя выражение для гамильтониана, можно получить выражение для инварианта:

$$I=\frac{m}{2}(r\dot{\xi}-\dot{r}\xi)^2+U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right)+\frac{\lambda m}{2}\frac{r^2}{\xi^2}+\frac{L}{2m}\frac{\xi^2}{r^2}. \qquad 4.2$$

Рассмотрим уравнение для $\xi(t)$ подробнее. Из него следует:

$\dot{\xi}^2 - \dot{\xi}_0^2 = -\frac{\lambda}{\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi_0^2}$. Далее будем полагать $\lambda = -\frac{1}{4\tau_0^2}$, а вместо t введем переменную

$\tau = \int_0^t \frac{dt;}{\xi(t')^2}$. Получим $\frac{d\xi}{d\tau} = \pm\xi\sqrt{(\dot{\xi}_0^2 - \frac{1}{4\tau_0^2\xi_0^2})\xi^2 + \frac{1}{4\tau_0^2}}$

В дальнейшем рассматривается случай, когда $\dot{\xi}_0^2 - \frac{1}{4\tau_0^2\xi_0^2} = 0$. При этом

$\xi(t) = \sqrt{\xi_0^2 \pm \frac{t}{\tau_0}}, \xi(\tau) = \xi_0 e^{\pm\frac{\tau}{2\tau_0}}$. Подставим в (4.2) переменную τ вместо t и введем

переменную $\rho = \frac{r}{\xi}$. Тогда инвариант I приводится к виду, аналогичному гамильтониану:

$$I = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U(\rho) - \frac{m}{8\tau_0^2}\rho^2 + \frac{L}{2m\rho^2}. \qquad 4.3$$

В (4.3) точка означает производную по τ .

Можно, далее, построить интеграл $J_I^{\pm}$, сопряженный с I Рассмотрим выражение:

$$J_I = -\tau + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'\sigma(\frac{2}{m}(I - U(\rho') + \frac{m\rho'^2}{8\tau_0^2} - \frac{L}{m^2\rho'^2})}{\sqrt{\frac{2}{m}(I - U(\rho') + \frac{m\rho'^2}{8\tau_0^2} - \frac{L}{m^2\rho'^2})}} \qquad 4.4$$

здесь $\sigma(x)$ - функция Хевисайда, $\rho > \rho_0, \rho_0$ -стартовая точка частицы. Выполнение равенства $\frac{dJ_I}{d\tau} \equiv 0$ является очевидным, если частицы движутся от центра. При движении к центру знак перед интегралом должен быть изменен.

Плотность частиц выражается интегралом в фазовом пространстве:

$$n = d\vec{q} f(I, J_I, L). \qquad 4.5$$

Элемент фазового пространства представим в виде:

$$d\vec{q} = dq_r dq_\theta dq_\phi, \quad dq_\phi = \frac{dM_\phi}{r\sin\theta}, dq_r = md\dot{r} = \frac{dI}{\xi\sqrt{\frac{2}{m}(I-U) - \lambda\frac{r^2}{\xi^2} - \frac{L\xi^2}{m^2r^2}}}, dq_\theta = \frac{dL}{2r\sqrt{L - \frac{M_\phi^2}{\sin^2\theta}}}.$$

Усреднение по M_ϕ приводит к выражению:

$$n=\frac{\pi}{2r^2}\int\frac{dIdLf(I,L,J_I)\sigma(\frac{2}{m}(I-U)-\lambda\frac{r^2}{\xi^2})}{\xi\sqrt{\frac{2}{m}(I-U)-\lambda\frac{r^2}{\xi^2}-\frac{L\xi^2}{m^2r^2}}}.$$

В переменных: ρ,τ

уравнение Пуассона принимает вид:

$$\frac{1}{\xi^4(\tau)}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho}=-\frac{4\pi e^2}{\xi^3(\tau)\rho^2}\int\frac{dIdLf(I,L,J_I)\sigma(\frac{2}{m}(I-U)-\lambda\frac{r^2}{\xi^2})}{\sqrt{\frac{2}{m}(I-U(\rho))-\lambda\rho^2-\frac{L}{m^2\rho^3}}}. \quad 4.6$$

Функция распределения должна содержать множитель, экспоненциально зависящий от J_I . Положим:

$$f=\kappa_*\delta(I-I_0)\delta(L-L_0)\exp\{-\frac{1}{2\tau_0}J_i\}.$$

Если выполнено условие $\xi\exp\left(\frac{\tau}{2\tau_0}\right)\equiv\xi_0$, то в уравнение Пуассона в качестве независимой

переменной входит только ρ. Таким образом, $\xi(t)=\sqrt{\xi_0^2-\frac{t}{\tau}}$. .Обозначим, далее,

$$\upsilon_0^2=\frac{2I_0}{m},s=\frac{\rho}{2\tau_0\upsilon_0},y=\frac{2U}{m\upsilon_0^2},l=\frac{L}{4m^2\tau_0^2\upsilon_0^4},u(s)=\int_0^s\frac{ds'\sigma(1-y(s')+s'^2-l/s'^2)}{\sqrt{1-y(s')-l/s'^2}}.$$

Тогда из уравнения Пуассона следует:

$$\frac{d}{ds}s^2\frac{d}{ds}y(s)=-\vartheta u'e^{-u(s)},u'(s)=\frac{\sigma(1-y(s)+s^2-l/s^2)}{\sqrt{1-y(s)+s^2-l/s^2}}. \quad 4.7$$

Константа ϑ определяется параметрами задачи -- $\kappa_*,m,\upsilon_0,\tau_0$ и зарядом e :

$\vartheta=\frac{8\pi e^2\kappa_*}{m\upsilon_0^3}\xi_0.$ В уравнении (4.7) плотность заряда определяется только уходящими частицами. Система интегрируется:

$$s^2\frac{d}{ds}y(s)=\vartheta e^{-u(s)}+C_1,u'(s)=\frac{\sigma(1-y(s)+s^2-l/s^2)}{\sqrt{1-y(s)+s^2-l/s^2}}. \quad 4.8$$

Эта система решалась при следующих условиях: $C_1=-1,y(0)=0,u(0)=0,l=1,\vartheta=1.$

Следует отметить, что полный заряд сгустка при $s\to\infty$ остается конечным $(e^{-u}-1\to-1).$

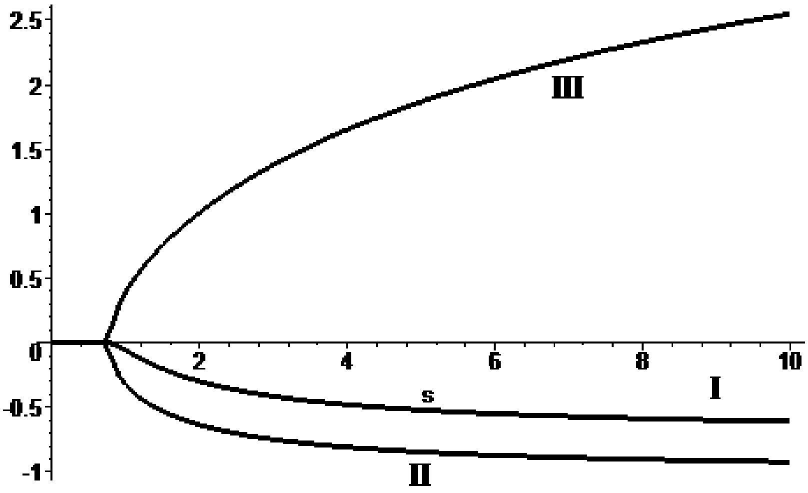

Рис. 5: З ависимость потенциала y(s) (I), полного заряда внутри сферы радиуса s (II) и функции u(s) (III)

II. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе найдены частные решения модельных нестационарных квантовомеханических задач, характеризуемых ненулевым моментом. Показана возможность построения пси-функции, приводящей к сферически симметричной

плотности заряда при l=1. При $l=\pm\frac{1}{2}$ получены частные решения, при которых также плотность заряда не зависит от углов. Решение кинетической задачи показывает возможность существования сгустка с конечным значением заряда при больших значениях автомодельной переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Mestschersky Uber die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Korper von verandlicher Masse Astron.Nachr., V.159, p.229 (1902).
2. V. V. Dodonov, V. I. Man'ko and D.T.Nikonov, Exact propagators for time-dependent Coulomb, delta and other potential. Phis. Lett.A, V.162, p. 359 (1992).
3. A. S. Chikhachev,\ Quantum Problem on the Dynamics of an Electric Charge in Its Own Field. PEPAN, Letters, V.17 p. 325 (2020).
4. А.С.Чихачев Нестационарная динамика системы зарядов в собственном поле. ЕНО, №1 (71), с.69 (2021).
5. А.С.Чихачев Нестационарная самосогласованная модель ансамбля в собственном поле. ЖТФ,Т.84,с.19.(2014).\
6. А.С.Чихачев\Динамика электрических зарядов в самосогласованном поле в сферически симметричной системе}
7. PEPAN, Letters,V.17c.271 (2020).
8. A.S.Chikhachev IPAC-2018,Vancuver,TUMK012, p.1516 (2018).
9. A.S. Chikhachev RuPAC-2021,Alushta,TUPSB17, p.265 (2021).

London Journal of Research in Science: Natural and Formal

This page is intentionally left blank