Decisions with Uncertainty using Deterministic Analysis

José Jesús Acosta Flores

ABSTRACT

The purpose of this article is to present a simple algorithm where an analyst and a decision- maker interact in problems with uncertainty and several objectives.

The algorithm transforms the random problem into a deterministic one by calculating the equivalents under certainty of the alternatives, where the preferences of the decision-maker can be neutrality, constant aversion or constant proneness to risk and the probability functions uniform, normal, exponential, Cauchy, Chi-square, Erlang, Gamma and Laplace.

To solve the deterministic problem, the algorithm applies the modified Proact method to make the interaction with the decision-maker easier. This modification consists of stipulating a value function for two of the measures of effectiveness.

One of the limitations of this algorithm is the existence of a single decider. Another limitation is when the probability functions of the effectiveness measures are not independent.

Keywords: decisions, multiple objectives, random variables, utility functions, value functions, equivalents under certainty, dominance, compensatory swaps.

Classification: DDC Code: 003

Language: English

Great Britain Journals Press

LJP Copyright ID: 392951
Print ISSN: 2631-8474
Online ISSN: 2631-8482

London Journal of Engineering Research

Volume 24 | Issue 5 | Compilation 1.0

Decisions with Uncertainty using Deterministic Analysis

José Jesús Acosta Flores

ABSTRACT

The purpose of this article is to present a simple algorithm where an analyst and a decision- maker interact in problems with uncertainty and several objectives.

The algorithm transforms the random problem into a deterministic one by calculating the equivalents under certainty of the alternatives, where the preferences of the decision-maker can be neutrality, constant aversion or constant proneness to risk and the probability functions uniform, normal, exponential, Cauchy, Chi-square, Erlang, Gamma and Laplace.

To solve the deterministic problem, the algorithm applies the modified Proact method to make the interaction with the decision-maker easier. This modification consists of stipulating a value function for two of the measures of effectiveness.

One of the limitations of this algorithm is the existence of a single decider. Another limitation is when the probability functions of the effectiveness measures are not independent.

Finally, to illustrate the application of the algorithm, a hypothetical example was presented where the best location of an airport is prescribed.

Keywords: decisions, multiple objectives, random variables, utility functions, value functions, equivalents under certainty, dominance, compensatory swaps.

RESUMEN

El propósito de este artículo es presentar un algoritmo simple donde interactúan un analista y un decisor en problemas con incertidumbre y varios objetivos.
El algoritmo transforma el problema aleatorio en uno determinista mediante el cálculo de los equivalentes bajo certeza de las alternativas, donde las preferencias del decisor pueden ser de neutralidad, de aversión constante o de propensión constante al riesgo y las funciones de probabilidad la uniforme, normal, exponencial, Cauchy, Chi-cuadrada, Erlang, Gamma y Laplace.

Para resolver el problema determinista aplica el método ProAct modificado para hacer más simple la interacción con el decisor. Esa modificación consiste en estipular una función valor para dos de las medidas de efectividad.

Una de las limitaciones del presente algoritmo es la existencia de un solo decisor. Otra limitación se tiene cuando las funciones de probabilidad de las medidas de efectividad no son independientes.

Finalmente, para ilustrar la aplicación del algoritmo se expuso un ejemplo hipotético donde se prescribe la mejor localización de un aeropuerto.

Descriptores: decisiones, objetivos múltiples, variables aleatorias, funciones utilidad, funciones valor, equivalentes bajo certeza, dominancia, permutas compensatorias.

Author: Profesor de tiempo completo. División de Ingeniería Mecánica e Industrial. Facultad de Ingeniería. UNAM. Edificio Bernardo Quintana. Piso 3. Facultad de Ingeniería. México D. F.

I. INTRODUCCIÓN

En muchos proyectos se tienen incertidumbre y varios objetivos, por lo que se requiere tener varias medidas de efectividad, al menos una para cada objetivo, y una función utilidad conjunta que evalúe las consecuencias de las decisiones posibles mediante sus medidas de efectividad. Con el fin de tener esa función utilidad hay necesidad de verificar diversos supuestos como la independencia preferencial, la independencia en utilidad y la independencia aditiva, (Keeney and Raiffa, 1976). Dependiendo del cumplimiento de esos supuestos se tienen funciones utilidad de diferentes tipos, que requieren respuestas a preguntas que pueden ser difíciles de contestar para un decisor.

Acosta (2019) desarrolla un algoritmo donde transforma el problema aleatorio en uno determinista y luego aplica el método ProAct para determinar la mejor decisión.

Para transformar el problema aleatorio en uno determinista, Acosta calcula para cada alternativa de decisión i y cada medida de efectividad j, el equivalente bajo certeza, EBC_{ij}, considerando $u(EBC_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(x_0) u_j(x_0) dx_0$ donde $f_{ij}(x_0)$ es la función densidad de probabilidad de la medida de efectividad j para la alternativa i; y $u_j(x_0)$ es la utilidad del decisor sobre la medida de efectividad j.

En el primer artículo (Acosta, 2019), se consideran la función densidad de probabilidad uniforme y la función utilidad exponencial.

En un segundo artículo (Acosta, 2021) utiliza además de la uniforme, las funciones normal y triangular.

Cuando se ha transformado el problema en determinista, se emplea el método ProAct (Hammond et al, 2000) que alterna los análisis de dominancia con los de permutas compensatorias.

En el análisis de dominancia se eliminan todas las opciones dominadas. Se considera que una opción A domina a B cuando todas las medidas de efectividad en A son mejores o iguales que las de B y al menos una de ellas es estrictamente mejor.

Para las permutas compensatorias se le pide al decisor que considere las variaciones en las medidas de efectividad que se deben hacer para que todas las alternativas tengan igual una de esas medidas. En cuanto se logra ello se elimina esa medida de efectividad que es igual para todas las alternativas.

Así, alternando dominancia (para eliminar alternativas) y permutas compensatorias (para eliminar medidas de efectividad) se llega, después de varias iteraciones, a alternativas evaluadas con una sola medida de efectividad. La que tenga el mejor valor en esa medida de efectividad será la mejor opción.

Se presenta a continuación la transformación del problema aleatorio en uno determinista considerando además de la uniforme y la normal, las funciones densidad de probabilidad Cauchy, Chi-cuadrada, Erlang, Gamma y Laplace.

II. TRANSFORMACIÓN DEL PROBLEMA ALEATORIO EN UNO DETERMINISTA

Para esta transformación se calcula, como se mencionó anteriormente, para cada alternativa de decisión i y cada medida de efectividad j, el equivalente bajo certeza, EBC_{ij}, considerando

$u(EBC_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(x_0)u_j(x_0)dx_0$ donde $f_{ij}(x_0)$ es la función densidad de probabilidad de la medida de efectividad j cuando se toma la alternativa i; $u_j(x_0)$ es la utilidad del decisor sobre la medida de efectividad j.

Usando la integral anterior, se obtienen las fórmulas que permiten el cálculo de EBC dependiendo de la función densidad de probabilidad, el tipo de comportamiento y si la función utilidad es monotónica creciente o decreciente.

Keeney y Raiffa (1976) establecen que cuando las preferencias son crecientes y se tiene aversión constante al riesgo $u(x_0) =- e^{-cx_0}$ y para propensión constante al riesgo $u(x_0) = e^{cx_0}$; cuando las preferencias son decrecientes y se tiene aversión constante al riesgo $u(x_0) =- e^{cx_0}$ y para propensión constante al riesgo $u(x_0) = e^{-cx_0}$

Por ejemplo, para determinar la fórmula para calcular EBC si las preferencias son crecientes, con propensión constante al riesgo y una función densidad de probabilidad de Laplace,

$$u(EBC) = \int_{x_0=-\infty}^{\infty} f_0(x_0)u(x_0)dx_0 = \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \frac{a}{2}e^{-a|x_0-b|}e^{cx_0}dx_0$$

Como se tiene el valor absoluto $|x_0 - b|$, entonces $|x_0 - b| = \{x_0 - b \;\; si\; x_0 \geq b \;\; b - x_0 \;\; si\; x_0 < b\}$

$$\text{Luego } u(EBC) = \int_{x_0=-\infty}^{b} e^{-a(b-x_0)}e^{(a+c)x_0}dx_0 + \int_{x_0=b}^{\infty} \frac{a}{2}e^{-a(x_0-b)}e^{cx_0}dx_0 =$$

$$= \frac{ae^{-ab}}{2}\int_{x_0=-\infty}^{b} e^{(a+c)x_0}dx_0 + \frac{ae^{ab}}{2}\int_{x_0=b}^{\infty} e^{(-a+c)x_0}dx_0 =$$

$$= \frac{ae^{-ab}}{2(a+c)}e^{(a+c)b} + \frac{ae^{ab}}{2(a-c)}e^{(c-a)b} = \frac{a^2e^{bc}}{a^2-c^2}$$

Como $u(EBC) = e^{cEBC}$ entonces $e^{cEBC} = \frac{a^2e^{bc}}{a^2-c^2}$ empleando el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y despejando EBC, queda $EBC = \frac{1}{c}Ln\left(\frac{a^2e^{bc}}{a^2-c^2}\right)$

La fórmula anterior se colocó en su lugar en la Tabla 2.

De la misma manera se desarrollaron las demás fórmulas que se muestran en las Tablas 1 y 2, donde el de la función uniforme está en el artículo de Acosta (2019) y el de la función normal en el de 2021.

Tabla 1: EBC u(x) creciente y aversión constante al riesgo o u(x) decreciente y propensión

Función de probabilidad	parámetros	rango	EBC
Uniforme, $\frac{1}{b-a}$	a, b, media = $\frac{a+b}{2}$	$a \leq x_0 \leq b$	$\frac{-1}{c}Ln\left\lvert\frac{e^{-cb}-e^{-ca}}{c(a-b)}\right\rvert$
Normal $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x_0-m)^2}{2\sigma^2}}$	Media = m, varianza = σ^2	$-\infty < x_0 < \infty$	$m - \frac{c\sigma^2}{2}$
Exponencial, $\lambda e^{-\lambda x_0}$	Media = $\frac{1}{\lambda}$	$0 \leq x_0$	$\frac{-1}{c}Ln\frac{\lambda}{c+\lambda}$

Cauchy, $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x_0-b)^2}$	Media = b, $a > 0, \ -\infty < b <$	$-\infty < x_0 < \infty$	b + a
Chi-cuadrada, $\frac{x_0^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{-x_0}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$	Media = n	$x_0 > 0$	$\frac{-n}{2c} Ln\left(\frac{1}{1+2c}\right)$
Erlang, $\frac{a^n x_0^{n-1} e^{-ax_0}}{(n-1)!}$	Media = $\frac{n}{a}$, $a > 0$	$x_0 > 0$	$\frac{-n}{c} Ln\left(\frac{a}{c+a}\right)$
Gamma, $\frac{x_0^a e^{\frac{-x_0}{b}}}{a! b^{a+1}}$	Media = $(a + 1)b$, $a >-1, \ b > 0$	$x_0 > 0$	$\frac{-1}{c} Ln\left(\frac{-1}{(1+bc)^{a+1}}\right)$
Laplace, $\frac{a}{2} e^{-a\lvert x_0-b\rvert}$	Media = $b, \ a > 0,$ $-\infty < b < \infty$	$-\infty < x_0 < \infty$	$-\frac{1}{c} Ln\left(\frac{a^2 e^{-bc}}{a^2-c^2}\right)$

Tabla 2: EBC u(x) creciente y propensión constante al riesgo o u(x) decreciente y aversión

Función de probabilidad	parámetros	rango	EBC
Uniforme, $\frac{1}{b-a}$	a, b	$a \le x_0 \le b$	$\frac{1}{c} Ln\left\lvert\frac{e^{cb}-e^{ca}}{c(b-a)}\right\rvert$
Normal $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_0-m)^2}{2\sigma^2}}$	Media = m, varianza = σ^2	$-\infty < x_0 < \infty$	$m + \frac{c\sigma^2}{2}$
Exponencial, $\lambda e^{-\lambda x_0}$	Media $=\frac{1}{\lambda}$	$0 \le x_0$	$\frac{1}{c} Ln \frac{\lambda}{\lvert c-\lambda\rvert}$
Cauchy, $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x_0-b)^2}$	Media = b, $a > 0, \ -\infty < b < \infty$	$-\infty < x_0 < \infty$	b-a
Chi-cuadrada, $\frac{x_0^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{-x_0}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$	Media = n	$x_0 > 0$	$\frac{n}{2c} Ln\left(\frac{1}{2c-1}\right)$
Erlang, $\frac{a^n x_0^{n-1} e^{-ax_0}}{(n-1)!}$	Media = $\frac{n}{a}$, $a > 0$	$x_0 > 0$	$\frac{n}{c} Ln\left(\frac{a}{c-a}\right)$
Gamma, $\frac{x_0^a e^{\frac{-x_0}{b}}}{a! b^{a+1}}$	Media = $(a + 1)b$, $a >-1, \ b > 0$	$x_0 > 0$	$\frac{1}{c} Ln\left(\frac{1}{(bc-1)^{a+1}}\right)$
Laplace, $\frac{a}{2} e^{-a\lvert x_0-b\rvert}$	Media = $b, \ a > 0,$ $-\infty < b < \infty$	$-\infty < x_0 < \infty$	$\frac{1}{c} Ln\left(\frac{a^2 e^{bc}}{a^2-c^2}\right)$

III. MÉTODO PROACT MODIFICADO

El algoritmo propuesto en este artículo consiste en transformar el problema aleatorio en uno determinista y después aplicar el método ProAct modificándolo, mediante la utilización de una función valor de dos atributos en las permutas compensatorias en vez de preguntar directamente al decisor, como sugieren los autores del método. Si la función valor de dos atributos cumple con la condición de intercambios correspondientes es de tipo aditivo, es decir, $v(x_0, y_0) = v_x(x_0) + v_y(y_0)$.

La condición de intercambios correspondientes (Keeney y Raiffa, 1976) consiste en lo siguiente:

Considere cuatro puntos

$$A: (x_1, y_1),\ B: (x_1, y_2),\ C: (x_2, y_1) \text{ y } D: (x_2, y_2)$$

Suponga que se cumple lo siguiente:

1. En (x_1, y_1) un aumento b en Y compensa una disminución a en X;
2. En (x_1, y_2) un aumento c en Y compensa una disminución a en X;

3. En $\left(x_2, y_1\right)$ un aumento b en Y compensa una disminución d en X;

Si en $\left(x_2, y_2\right)$ un aumento c en Y compensa una disminución d en X y esto se cumple independientemente de las cantidades $x_1, x_2, y_1, y_2, a, b, c, d$, se dice que se satisface la condición de intercambios correspondiente.

Keeney y Raiffa (1976) mencionan incluso que la función valor puede utilizarse, por facilidad de análisis, aún cuando sus resultados sean aproximaciones a los reales

También, como los tres axiomas de funciones valor son los tres primeros de los siete de las funciones utilidad (De Neufville, 1990) es posible concluir que todas las funciones utilidad son funciones valor y que no todas las funciones valor son funciones utilidad.

$$\text{Luego, } v\left(x_0, y_0\right) = k_1 u_x\left(x_0\right) + k_2 u_y\left(y_0\right)$$

A continuación, se presenta el algoritmo donde interactúan el decisor y el analista.

Algoritmo

Parte uno: Definición de objetivos, medidas de efectividad y función utilidad

Paso 1-1 El analista le pide al decisor que defina el horizonte de planeación, los objetivos, las medidas de efectividad y sus rangos, estableciendo si las medidas son monotónicas crecientes o decrecientes.

Paso 1-2 El analista para cada medida de efectividad forma la lotería L cuyas consecuencias son los extremos del rango proporcionado en el paso anterior, le asigna probabilidades de 0.5 a cada una y le pregunta al decisor el equivalente bajo certeza (EBC) de cada lotería.

Paso 1-3 El analista calcula el valor esperado (VE) de cada lotería y determina la función utilidad, u(x) de cada medida de efectividad. Como establecen Keeney y Raiffa (1976) si las preferencias son crecientes (por ejemplo, ganancias) entonces, si EBC = VE, neutralidad al riesgo, u(x) = x; si EBC < VE, aversión al riesgo, $u(x) = -e^{-cx}$; si EBC > VE, propensión al riesgo, $u(x) = e^{cx}$; si las preferencias son decrecientes (por ejemplo, costos) entonces, si EBC = VE, neutralidad al riesgo, u(x) = -x; si EBC > VE, aversión al riesgo $u(x) = -e^{cx}$; si EBC < VE, propensión al riesgo, $u(x) = e^{-cx}$

Paso 1-4 El analista, para cada medida de efectividad donde el decisor tiene aversión o propensión al riesgo, determina el valor de c > 0, mediante la ecuación u(EBC) = u(L). Para ello puede utilizar el algoritmo Newton-Raphson, $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c)}{f'(c)}$; donde $f(c) = u(L) - u(EBC)$ y $f'(c)$ es la primera derivada de f con respecto a c

Parte dos: Estipulación de alternativas

Paso 2-1 El analista le pide al decisor que estipule las alternativas, precisando para cada una de ellas la función densidad de probabilidad de cada medida de efectividad, su rango, su media y su desviación estándar.

Paso 2-2 El analista calcula el EBC de cada alternativa y medida de efectividad, utilizando las tablas 1 y 2 cuando el decisor tiene aversión o propensión. En el caso de neutralidad EBC = media de la función densidad de probabilidad. El analista presenta los EBC calculados en una Tabla cuyos renglones son las alternativas y las columnas las medidas de efectividad.

Parte tres: Selección de la mejor alternativa.

Paso 3-1 El analista encuentra y elimina las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas los demás es igual que B.

Paso 3-2 El analista ve las alternativas que no han sido eliminadas. Si sólo queda una, esa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así, habrá que continuar con el Paso 3-3.

Paso 3-3 El analista le hará una pregunta al decisor para determinar la función valor para dos medidas de efectividad. Sean X, Y dos medidas de efectividad, donde $\left(x_*, y_*\right)$ son los peores valores y $\left(x^*, y^*\right)$ *son los mejores*. El analista le pregunta la cantidad de x donde $\left(x, y_*\right) \sim \left(x_*, y^*\right)$. Como hay indiferencia $v\left(x, y_*\right) = v\left(x_*, y^*\right)$

Si se cumple la condición de intercambios correspondientes la función valor es de tipo aditivo, o sea, $v(x, y) = v_x(x) + v_y(y)$. Como todas las funciones utilidad son funciones valor, se emplean las funciones determinadas en el Paso 1-3.

Quedando $v(x, y) = k_x u_x(x) + k_y u_y(y)$ y $k_x + k_y = 1$; usando $v\left(x, y_*\right) = v\left(x_*, y^*\right)$, queda

$$k_x u_x(x) + k_y u_y\left(y_*\right) = k_x u_x\left(x_*\right) + k_y u_y\left(y^*\right) \text{ y } k_x + k_y = 1,$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Al resolver este sistema está determinada la función valor para dos medidas de efectividad.

Si sólo quedan dos medidas de efectividad se evalúan, usando la función valor, todas las alternativas y la que tenga el valor mayor es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así, habrá que continuar con el Paso 3-4.

Paso 3-4 El analista con la función valor de dos medidas de efectividad, puede hacer que todas las alternativas tengan igual una de esas medidas. En cuanto logra ello se elimina la medida de efectividad que es igual para todas las alternativas, y se regresa al Paso 3-1.

Se presenta ahora un ejemplo donde se aplican los pasos del algoritmo.

IV. EJEMPLO. ELECCIÓN DEL SITIO DONDE SE VA A CONSTRUIR UN AEROPUERTO

Parte uno: Definición de objetivos, medidas de efectividad y función utilidad

Paso 1-1 El analista le pide al decisor que defina el horizonte de planeación, los objetivos, las medidas de efectividad y sus rangos, estableciendo si las preferencias de las medidas son monotónicas crecientes o decrecientes.

El decisor definió como horizonte de planeación 30 años, y cuatro objetivos:

Minimizar el costo de construcción y de operación del aeropuerto. Su medida de efectividad, x_1, es dicho costo en miles de millones de pesos en valor presente; su rango [a, b] = [50, 200] mil millones de pesos; su preferencia es monotónica decreciente.

Minimizar el tiempo de acceso al aeropuerto. Su medida de efectividad, x_2, es el tiempo promedio para llegar al aeropuerto desde diferentes zonas en minutos; su rango [a, b] = [15, 90] minutos; su preferencia es monotónica decreciente.

Maximizar la capacidad del aeropuerto. Su medida, x_3, es el número de despegues y aterrizajes por hora; su rango [a, b] = [50, 250] operaciones por hora; su preferencia es monotónica creciente.

Minimizar el efecto de la contaminación del ruido causado por los aviones. Su medida, x_4, es el número de miles de personas sujetas a un nivel de ruido de 80 decibeles o más; su rango [a, b] = [10, 200] miles de personas; su preferencia es monotónica decreciente.

Paso 1-2 El analista para cada medida de efectividad forma la lotería L cuyas consecuencias son los extremos del rango proporcionado en el paso anterior, le asigna probabilidades de 0.5 a cada extremo y le pregunta al decisor el equivalente bajo certeza (EBC) de cada lotería.

En la Tabla 3 están las respuestas del decisor.

Tabla 3: EBC de la lotería L = [a, 0.5; b, 0.5]

Medida de efectividad	a	b	EBC
x_1: *costo*	50	200	140
x_2: *tiempo de acceso*	15	90	60
x_3: *capacidad*	50	250	120
x_4: *personas afectadas por el ruido*	10	200	120

Paso 1-3 El analista calcula el valor esperado (VE) de cada lotería. Con los valores de EBC y VE, así como el conocimiento si la medida de efectividad es monotónica creciente o decreciente, utilizando las Tablas 1 y 2, determina la función utilidad, u(x). El resultado está en la Tabla 4.

Tabla 4: u(x) para cada medida de efectividad

Medida de efectividad	Lotería	VE	Función monotónica	VE vs EBC	u(x)
x_1	$L(50, 0.5; 200, 0.5)$	125	decreciente	VE<EBC	$-e^{cx}$
x_2	$L(15, 0.5; 90, 0.5)$	52.5	decreciente	VE<EBC	$-e^{cx}$
x_3	$L(50, 0.5; 250, 0.5)$	150	creciente	VE>EBC	$-e^{-cx}$
x_4	$L(10, 0.5; 200, 0.5)$	105	decreciente	VE<EBC	$-e^{cx}$

Paso 1-4 El analista, para cada medida de efectividad donde el decisor tiene aversión o propensión al riesgo, formula la ecuación u(EBC) = u(L), que es una ecuación con una sola incógnita, el parámetro c, y resuelve dicha ecuación. (Puede utilizar el algoritmo Newton-Raphson)

Para la primera medida de efectividad, $-e^{140c} = 0.5\left(-e^{50c}\right) + 0.5(-e^{200c})$
De manera que $f(c) = e^{50c} + e^{200c} - 2e^{140c}$
Su derivada $f'(c) = 50e^{50c} + 200e^{200c} - 280e^{140c}$
Utilizando el algoritmo Newton-Raphson

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Proporciona c = 0.00548, luego $u_1\left(x_1\right) = -e^{0.00548x_1}$

Para la segunda medida de efectividad, $-e^{60c} = 0.5\left(-e^{15c}\right) + 0.5(-e^{90c})$
De manera que $f(c) = e^{15c} + e^{90c} - 2e^{60c}$

Su derivada $f'(c) = 15e^{15c} + 90e^{90c} - 120e^{60c}$

Utilizando el algoritmo Newton-Raphson

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Proporciona c = 0.01096, luego $u_2(x_2) = -e^{0.01096x_2}$

Para la tercera medida de efectividad, $-e^{-120c} = 0.5(-e^{-50c}) + 0.5(-e^{-250c})$

De manera que $f(c) = e^{-50c} + e^{-250c} - 2e^{-120c}$

Su derivada $f'(c) = -50e^{-50c} - 250e^{-250c} + 240e^{-120c}$

Utilizando el algoritmo Newton-Raphson

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Proporciona c = 0.00639, luego $u_3(x_3) = -e^{-0.00639x_3}$

Para la cuarta medida de efectividad, $-e^{120c} = 0.5(-e^{10c}) + 0.5(-e^{200c})$

De manera que $f(c) = e^{10c} + e^{200c} - 2e^{120c}$

Su derivada $f'(c) = 10e^{10c} + 200e^{200c} - 240e^{120c}$

Utilizando el algoritmo Newton-Raphson

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Proporciona c = 0.00338, luego $u_4(x_4) = -e^{0.00338x_4}$

Parte dos: Estipulación de alternativas

Paso 2-1 El analista le pide al decisor que estipule las alternativas, precisando para cada una de ellas la función densidad de probabilidad de cada medida de efectividad, su rango, su media y su desviación estándar. Información que se presenta en las Tablas 5 a 8.

Tabla 5: Medida de efectividad 1. Costo (miles de millones de pesos)

Alternativa	Función densidad	Rango		Media	Desviación estándar
		a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Sitio 1	Uniforme	50	70	60	5.773503
Sitio 2	Uniforme	60	100	80	11.54701
Sitio 3	Uniforme	80	120	100	11.54701
Sitio 4	Uniforme	100	200	150	28.86751
Sitio 5	Uniforme	60	90	75	8.660254
Sitio 6	Uniforme	90	150	120	17.32051
Sitio 7	Uniforme	130	190	160	17.32051
Sitio 8	Uniforme	120	140	130	5.773503
Sitio 9	Uniforme	130	170	150	11.54701
Sitio 10	Uniforme	150	180	165	8.660254

Tabla 6: Medida de efectividad 2. Tiempo de acceso (minutos)

Alternativa	Función densidad	Rango		Media	Desviación estándar
		a	**b**	$m = \frac{a+b}{2}$	$\sigma = \frac{b-m}{3.6}$
Sitio 1	Normal	15	35	25	2.777778
Sitio 2	Normal	35	55	45	2.777778
Sitio 3	Normal	55	75	65	2.777778
Sitio 4	Normal	75	90	82.5	2.083333
Sitio 5	Normal	20	40	30	2.777778
Sitio 6	Normal	40	60	50	2.777778
Sitio 7	Normal	60	80	70	2.777778
Sitio 8	Normal	15	75	45	8.333333
Sitio 9	Normal	35	90	62.5	7.638889
Sitio 10	Normal	20	30	25	1.388889

Tabla 7: Medida de efectividad 3. Capacidad (operaciones por hora)

Alternativa	Función densidad	Rango		Media	Desviación estándar
		a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	$\sigma = \frac{b-m}{3.6}$
Sitio 1	Normal	50	100	75	6.944444
Sitio 2	Normal	100	150	125	6.944444
Sitio 3	Normal	150	200	175	6.944444
Sitio 4	Normal	200	250	225	6.944444
Sitio 5	Normal	70	120	95	6.944444
Sitio 6	Normal	140	160	150	2.777778
Sitio 7	Normal	180	220	200	5.555556
Sitio 8	Normal	240	250	245	1.388889
Sitio 9	Normal	220	230	225	1.388889
Sitio 10	Normal	200	210	205	1.388889

Tabla 8: Medida de efectividad 4. Personas afectadas por el ruido (miles de personas)

Alternativa	Función densidad	Rango		Media	Desviación estándar
		a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	$\sigma = \frac{b-m}{3.6}$
Sitio 1	Normal	10	50	30	5.555556
Sitio 2	Normal	50	100	75	6.944444
Sitio 3	Normal	100	150	125	6.944444
Sitio 4	Normal	150	200	175	6.944444
Sitio 5	Normal	40	70	55	4.166667
Sitio 6	Normal	60	110	85	6.944444
Sitio 7	Normal	130	170	150	5.555556
Sitio 8	Normal	30	70	50	5.555556
Sitio 9	Normal	70	120	95	6.944444
Sitio 10	Normal	140	160	150	2.777778

Paso 2-2 El analista calcula el EBC de cada alternativa y medida de efectividad, utilizando las tablas 3 y 4. Y presenta los EBC calculados en una Tabla cuyos renglones son las alternativas y las columnas las medidas de efectividad. El resultado está en la Tabla 9.

Tabla 9: Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Tiempo de acceso	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	60.09	25.02	74.85	30.05
Sitio 2	80.37	45.03	124.85	75.08
Sitio 3	100.37	65.03	174.85	125.08
Sitio 4	152.28	82.51	224.85	175.08
Sitio 5	75.21	30.03	94.85	55.03
Sitio 6	120.82	50.03	149.98	85.08
Sitio 7	160.82	70.02	199.90	150.05
Sitio 8	130.09	45.22	244.99	50.05
Sitio 9	150.37	62.69	224.99	95.08
Sitio 10	165.21	25.01	204.99	150.01

Parte tres: Selección de la mejor alternativa

Paso 3-1 El analista encuentra y elimina las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas los demás es igual que B.

El sitio 8 domina a los sitios 4 y 7, por lo cual quedan eliminados. Quedando así la Tabla 10.

Tabla 10: Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Tiempo de acceso	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	60.09	25.02	74.85	30.05
Sitio 2	80.37	45.03	124.85	75.08
Sitio 3	100.37	65.03	174.85	125.08
Sitio 5	75.21	30.03	94.85	55.03
Sitio 6	120.82	50.03	149.98	85.08
Sitio 8	130.09	45.22	244.99	50.05
Sitio 9	150.37	62.69	224.99	95.08
Sitio 10	165.21	25.01	204.99	150.01

Paso 3-2 El analista ve las alternativas que no han sido eliminadas. Si sólo queda una, esa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así, habrá que continuar con el Paso 3-3.

Como aún hay 8 sitios no dominados, se continúa con el Paso 3-3

Paso 3-3 El analista le hará una pregunta al decisor para determinar la función valor para dos medidas de efectividad.

El analista escoge dos medidas de efectividad. En este ejemplo seleccionó x_1: costo con rango [50, 200] y x_2: tiempo de acceso con rango [15,90].

El analista le pregunta al decisor el valor de x_1 que le hace indiferente $(200, 15)$ con $(x_1, 90)$. El decisor contestó x_1 =100.

Por lo anterior, $v(200, 15) = v(100, 90)$

Como $v(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2)$ entonces $k_1u_1(200) + k_2u_2(15) = k_1u_1(100) + k_2u_2(90)$ donde $u_1(x_1) = -e^{0.00548x_1}$ y $u_2(x_2) = -e^{0.01096x_2}$ que fueron determinadas en el Paso 1-4.

Esta ecuación junto con $k_1 + k_2 = 1$ constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverlo se tiene $k_1 = 0.543489$, $k_2 = 0.456511$

Como el número de medidas de efectividad que permanecen es diferente de 2, habrá que continuar con el paso siguiente.

Paso 3-4 El analista con la función valor de dos medidas de efectividad, puede hacer que todas las alternativas tengan igual una de esas medidas. En cuanto se logra ello se elimina la medida de efectividad que es igual para todas las alternativas, y el analista regresa al Paso 3-1.

El analista fijó el tiempo de acceso $x_2^F = 25.02$ minutos y calculó el costo que deben tener las alternativas. Para hacer este cálculo, empleó $\left(x_1, x_2\right) \sim \left(x_1^N, x_2^F\right)$

Que proporciona $x_1^N = \frac{1}{0.00548} Ln\left(\frac{.543489u_1\left(x_1\right)+.456511\left(u_2\left(x_2\right)-u_2\left(x_2^F\right)\right)}{0.543489}\right)$

Los costos nuevos, calculados con la fórmula anterior, se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Tiempo de acceso	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	60.09	25.02	74.85	30.05
Sitio 2	109.70	25.02	124.85	75.08
Sitio 3	155.24	25.02	174.85	125.08
Sitio 5	82.58	25.02	94.85	55.03
Sitio 6	150.98	25.02	149.98	85.08
Sitio 8	153.08	25.02	244.99	50.05
Sitio 9	190.75	25.02	224.99	95.08
Sitio 10	165.19	25.02	204.99	150.01

Como todas las alternativas tienen el mismo tiempo de acceso se elimina esa medida de efectividad quedando la Tabla 12.

Tabla 12: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	60.09	74.85	30.05
Sitio 2	109.70	124.85	75.08
Sitio 3	155.24	174.85	125.08
Sitio 5	82.58	94.85	55.03
Sitio 6	150.98	149.98	85.08
Sitio 8	153.08	244.99	50.05
Sitio 9	190.75	224.99	95.08
Sitio 10	165.19	204.99	150.01

Se regresa al paso 3-1

Paso 3-1 El analista encuentra y elimina las alternativas dominadas.

El sitio 8 domina a los sitios 9 y 10, por lo que se eliminan los sitios dominados, quedando la Tabla 13.

Tabla 13: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	60.09	74.85	30.05
Sitio 2	109.70	124.85	75.08
Sitio 3	155.24	174.85	125.08
Sitio 5	82.58	94.85	55.03
Sitio 6	150.98	149.98	85.08
Sitio 8	153.08	244.99	50.05

Paso 3-2 El analista ve las alternativas que no han sido eliminadas. Si sólo queda una, esa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así, habrá que continuar con el Paso 3-3.

Como aún hay 6 sitios no dominados, se continúa con el Paso 3-3

Paso 3-3 El analista le hará una pregunta al decisor para determinar la función valor para dos medidas de efectividad.

El analista escoge dos medidas de efectividad. En este ejemplo seleccionó x_1: costo con rango [50, 200] y x_3 : capacidad con rango [50,250] .

El analista le pregunta al decisor el valor de x_1 que le hace indiferente $(200, 250)$ *con* $\left(x_1, 50\right)$. El decisor contestó x_1 =60.

Por lo anterior, $v(200, 250) = v(60, 50)$

Como $v\left(x_1, x_3\right) = k_1 u_1\left(x_1\right) + k_3 u_3\left(x_3\right)$ entonces $k_1 u_1(200) + k_3 u_3(250) = k_1 u_1(60) + k_3 u_3(50)$ donde $u_1\left(x_1\right) = -e^{0.00548x_1}$ y $u_3\left(x_3\right) = -e^{-0.00639x_3}$ que fueron determinadas en el Paso 1-4.

Esta ecuación junto con $k_1 + k_3 = 1$ constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverlo se tiene $k_1 = 0.246411, k_3 = 0.753589$

$$v\left(x_1, x_3\right) = 0.246411\left(-e^{0.00548x_1}\right) + 0.753589\left(-e^{-0.00639x_3}\right)$$

Como el número de medidas de efectividad que permanecen es diferente de 2, habrá que continuar con el paso siguiente.

Paso 3-4 El analista con la función valor de dos medidas de efectividad, puede hacer que todas las alternativas tengan igual una de esas medidas. En cuanto se logra ello se elimina la medida de efectividad que es igual para todas las alternativas, y el analista regresa al Paso 3-1.

El analista fijó la capacidad $x_3^F = 244.99$ operaciones por hora y calculó el costo que deben tener las alternativas. Para hacer este cálculo, empleó $\left(x_1, x_3\right) \sim \left(x_1^N, x_3^F\right)$

Que proporciona $x_1^N = \frac{1}{0.00548} Ln\left(\frac{.246411 u_1\left(x_1\right) + .753589\left(u_3\left(x_3\right) - u_3\left(x_3^F\right)\right)}{-0.246411}\right)$

Los costos nuevos, calculados con la fórmula anterior, se muestran en la Tabla 14.

Tabla 14: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Capacidad	Afectación por ruido
Sitio 1	177.60	244.99	30.05
Sitio 2	171.70	244.99	75.08
Sitio 3	181.44	244.99	125.08
Sitio 5	174.46	244.99	55.03
Sitio 6	189.25	244.99	85.08
Sitio 8	153.08	244.99	50.05

Como todas las alternativas tienen la misma capacidad se elimina esa medida de efectividad quedando la Tabla 15.

Tabla 15: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Afectación por ruido
Sitio 1	177.60	30.05
Sitio 2	171.70	75.08
Sitio 3	181.44	125.08
Sitio 5	174.46	55.03
Sitio 6	189.25	85.08
Sitio 8	153.08	50.05

Se regresa al Paso 3-1

Paso 3-1 El analista encuentra y elimina las alternativas dominadas.

El sitio 8 domina a los sitios 2, 3, 5 y 6, por lo que se eliminan los sitios dominados, quedando la Tabla 16.

Tabla 16: Nuevos equivalentes bajo certeza

Alternativas	Costo	Afectación por ruido
Sitio 1	177.60	30.05
Sitio 8	153.08	50.05

Paso 3-2 El analista ve las alternativas que no han sido eliminadas. Si sólo queda una, esa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así, habrá que continuar con el Paso 3-3.

Como aún hay 2 sitios no dominados, se continúa con el Paso 3-3

Paso 3-3 El analista le hará una pregunta al decisor para determinar la función valor para dos medidas de efectividad.

Sólo quedan dos medidas de efectividad x_1: costo con rango [50, 200] y $x_{4:}$ afectación por ruido con rango [10,200] .

El analista le pregunta al decisor el valor de x_1 que le hace indiferente $(200, 10)\ con\ \left(x_1, 200\right)$. El decisor contestó x_1 =180.

Por lo anterior, $v(200, 10) = v(180, 200)$

Como $v\left(x_1, x_4\right) = k_1 u_1\left(x_1\right) + k_4 u_4\left(x_4\right)$ entonces $k_1 u_1(200) + k_4 u_4(10) = k_1 u_1(180) + k_4 u_4(200)$ donde $u_1\left(x_1\right) = -\ e^{0.00548x_1}$ y $u_4\left(x_4\right) = -\ e^{0.00338x_4}$ que fueron determinadas en el Paso 1-4.

Esta ecuación junto con $k_1 + k_4 = 1$ constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverlo se tiene $k_1 = 0.75, k_4 = 0.25$

$$v(x_1, x_4) = 0.75\left(-\ e^{0.00548x_1}\right) + 0.25\left(-\ e^{0.00338x_4}\right)$$

Como sólo quedan dos medidas de efectividad, usando la ecuación anterior, se calcula el valor de los sitios 1 y 8 y se elige el que tenga mayor valor. Así, $v(sitio\ 1) =-\ 2.26\ y\ v(sitio\ 8) =-\ 2.03$, por lo que el sitio 8 es el mejor.

V. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta un algoritmo donde interactúan un decisor y un analista. El analista le hace preguntas al decisor y con sus respuestas efectúa los cálculos requeridos.
El algoritmo siempre converge a una solución óptima.

Los análisis deterministas son más sencillos que los aleatorios, con lo que se logran simplificaciones importantes que permiten llegar a la solución con un esfuerzo mínimo tanto del decisor como del analista.

Este algoritmo es útil cuando existe un solo decisor, una sola etapa y las distribuciones de probabilidad son: uniforme, normal, exponencial, Cauchy, Chi-cuadrada, Erlang, Gamma y Laplace. Si en el problema que se estuviese analizando las distribuciones fuesen diferentes, este artículo presenta el procedimiento para que el analista pueda determinar los valores requeridos de los equivalentes bajo certeza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. *Acosta Flores José Jesús* (2019) Algoritmo para analizar decisiones con objetivos múltiples bajo incertidumbre. Ingeniería Investigación y Tecnología, volumen XX (numero 1), enero-marzo
2. *Acosta Flores José Jesús* (2021) Algoritmo interactivo para decisiones con varios objetivos, riesgo e incertidumbre. Ingeniería Investigación y Tecnología, volumen XXII (numero 2), abril-junio.
3. *De Neufville Richard* (1990) Applied Systems Analysis: Engineering Planning and Technology Management McGraw-Hill Inc.
4. *Drake Alvin W* (1988) Fundamentals of Applied Probability Theory McGraw-Hill Book Company.
5. *Hammond J. S, Keeney R. L, Raiffa H.* (2000) *Decisiones inteligentes* Gestión 2000.
6. *Keeney Ralph L. and Raiffa Howard* (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* John Wiley & Sons.
7. *Keeney Ralph L* (1992) *Value-Focused Thinking. A path to Creative Decision making,* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA; London, England.